

文章编号: 1007-6654(2006)02-0080-05

## 测量冷原子温度的理论与近似拟合公式的误差分析

马杰, 韩燕旭, 王波, 王海\*

(量子光学与光量子器件国家重点实验室; 山西大学光电研究所, 山西太原 030006)

**摘要:** 对短程飞行时间法(time-of-flight, TOF)中推算冷原子温度的理论拟合公式与近似拟合公式进行了误差分析与比较。研究表明:对于使用短程飞行吸收光谱信号推测冷原子团温度,当探测光光斑半径与冷原子团高斯半径之比  $k$  小于 0.2 时,理论拟合公式和近似拟合公式能很好的相符,随着探测光光斑半径与冷原子团高斯半径比值的逐渐增大,用近似拟合公式所得 TOF 吸收信号与用理论拟合公式所得 TOF 吸收信号的误差也将逐渐增大,当比值为 0.5 时,用近似拟合公式所得 TOF 吸收信号的误差将增大到 20%。

**关键词:** 磁光阱(MOT); 冷原子; 短程飞行时间法(TOF)

**中图分类号:** O431      **文献标识码:** A

### 0 引言

在通常情况下原子处于气体状态时,其无规热运动非常剧烈,在常温下运动速度可达 300 m/s,这相当于空气中声音的传播速度,在这种高速运动的状态下,将原子控制住并加以观察和研究是很困难的。1975 年,人们提出了激光冷却中性原子的思想<sup>[1]</sup>,随后在实验上成功获得了冷原子<sup>[2]</sup>。目前激光冷却原子温度已达几十  $\mu\text{K}$ <sup>[2-5]</sup> 到几十  $\text{nK}$ <sup>[6-8]</sup>,有关这个领域的理论和实验研究已有多篇文章评述<sup>[9-11]</sup>。原子冷却后温度是一个统计热力学量,不能直接测量,可以通过间接方法测量,测量方法有释放再俘获磁光阱中冷原子团的 R&R 方法<sup>[2]</sup>;通过 CCD 测得的探测光光强分布计算冷原子团温度的吸收成像法<sup>[3]</sup>;自由下落膨胀的冷原子团穿过共振探测光的飞行时间法(TOF)<sup>[4]</sup>;与其它方法相比,短程飞行时间法(TOF)<sup>[5]</sup>简单可靠,在冷原子温度测量中广泛使用。传统的 TOF 荧光法中,要求冷原子团下落的距离比较大,这在以前的激光冷却装置中是可行的。随着冷原子技术的不断发展,冷原子装置不断减小,例如在 50 mm × 50 mm × 100 mm 的玻璃气室中就可以实现原子冷却<sup>[12]</sup>。2002 年 Brzozowski

等人提出了通过测量冷原子短程飞行过程中的吸收光谱推测冷原子温度的方法并给出了理论拟合公式<sup>[5]</sup>,为了使该理论拟合公式简单明了,又适合于实验测量,他们对该理论拟合公式作了近似,得到了当探测光光斑半径远小于冷原子团半径时的近似拟合公式,利用该近似拟合公式,结合短程 TOF 吸收信号可以较方便的推测出冷原子的温度,但该拟合公式适用于探测光光斑半径与冷原子团半径之比  $k$  远小于 1 的情况,当探测光光斑半径与冷原子团半径之比在一定范围内变化时,了解用近似拟合公式计算冷原子温度时出现的误差,在分析实验数据时十分必要,它能告诉我们比值  $k$  多大时,近似拟合公式引起的误差影响有多大。

本文在短程飞行吸收光谱推测冷原子团温度的基本理论上<sup>[5]</sup>对用于冷原子温度测量的理论拟合公式与近似拟合公式的误差进行了分析和比较。

### 1 理论模型

假设冷却原子呈高斯分布,测量冷原子温度时,需同时迅速关闭冷却光,再泵浦光和磁场,磁光阱中冷原子团受到重力作用而自由下落,由于原子冷却

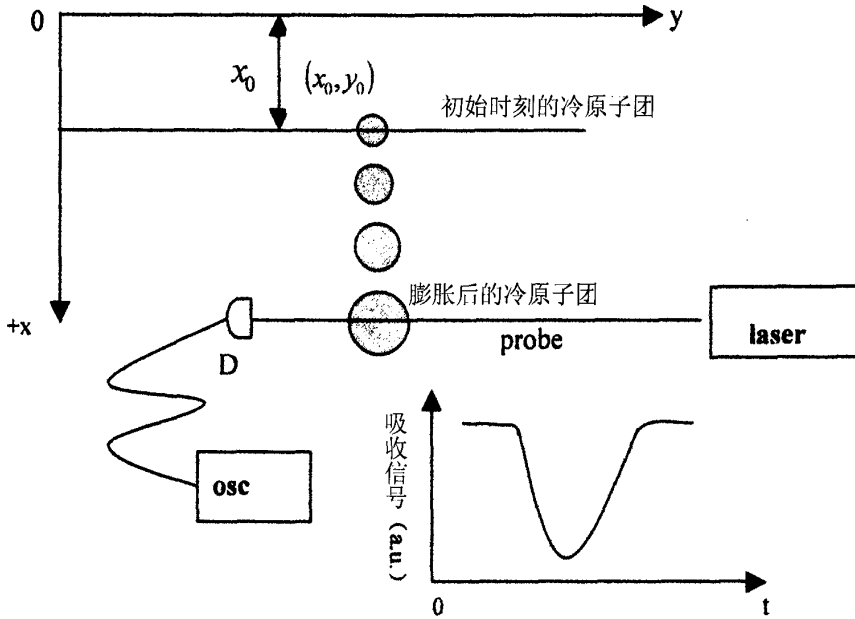
收稿日期: 2005-12-31

基金项目: 国家自然科学基金(60325414, 60578059); 教育部科技创新工程重大项目培育资金(705010); 山西省自然科学基金(20031007); 山西省留学归国人员基金

作者简介: 马杰(1979-),男,山西忻州人,山西大学光电研究所量子光学与光量子器件国家重点实验室在读硕士,研究方向:量子光学与非线性光学; \* 通讯联系人 E-mail: wanghai@sxu.edu.cn.

后仍具有初速度,因此在下落的过程中必然发生膨胀,经过一段时间后,膨胀的冷原子团下降到  $x$  处,穿过探测光,由探测器探测冷原子团穿过探测光的过程中产生的 TOF 吸收信号就可推断出冷原子团

的初始温度,理论计算过程已有文献<sup>[5]</sup>给出。下面我们在此基础上给出较详细的理论拟合公式和近似拟合公式的推导过程,短程飞行时间法测量冷原子温度的实验示意图如图(1)所示。



D 是探测器, osc 是示波器, probe 是探测光  
 图 1 短程飞行时间法测量冷原子温度的实验示意图  
 D is detector, osc is oscillograph, probe is probe beam

Fig. 1 Schematic of measuring temperature of cold atoms with short-distance time-of-flight(TOF) method

假设冷原子团的初始位置是  $(x_0, y_0, z_0)$ , 初速度为  $(\nu_{x0}, \nu_{y0}, \nu_{z0})$ , 初始时刻冷原子团在相位空间  $(x_0, y_0, z_0, \nu_{x0}, \nu_{y0}, \nu_{z0})$  中的几率分布呈高斯分布,可表示为<sup>[5]</sup>:

$$N(x_0, y_0, z_0, \nu_{x0}, \nu_{y0}, \nu_{z0}) = \prod_{i \in (x, y, z)} g(i_0, \sigma_0) g(\nu_{i0}, \sigma_\nu) \quad (1)$$

式中,  $g(x, \sigma)$  是高斯函数,

$$g(x, \sigma) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

假设初始时冷原子团是球对称分布,冷原子团高斯半径为  $\sigma_0$ , 冷原子团平均速度为  $\sigma_\nu$ , 由统计力学可知冷原子团平均速度  $\sigma_\nu$  与冷原子团的温度  $T$  满足下面关系:

$$\frac{1}{2}k_B T = \frac{1}{2}M\sigma_\nu^2 \quad (2)$$

式中,  $M$  是单个原子的质量,  $k_B$  是玻尔兹曼常数,假设  $+x$  方向为重力方向,当冷原子团下落到  $x$  位置时,沿重力方向  $(+x)$ ,  $y, z$  方向冷原子团的扩散速

度为:

$$\nu_{x0} = \frac{x - x_0}{t} - \frac{1}{2}gt, \\ \nu_{y0} = \frac{y - y_0}{t}, \quad \nu_{z0} = \frac{z - z_0}{t}$$

对原子初始位置进行积分,得到  $t$  时刻原子的几率分布<sup>[5]</sup>

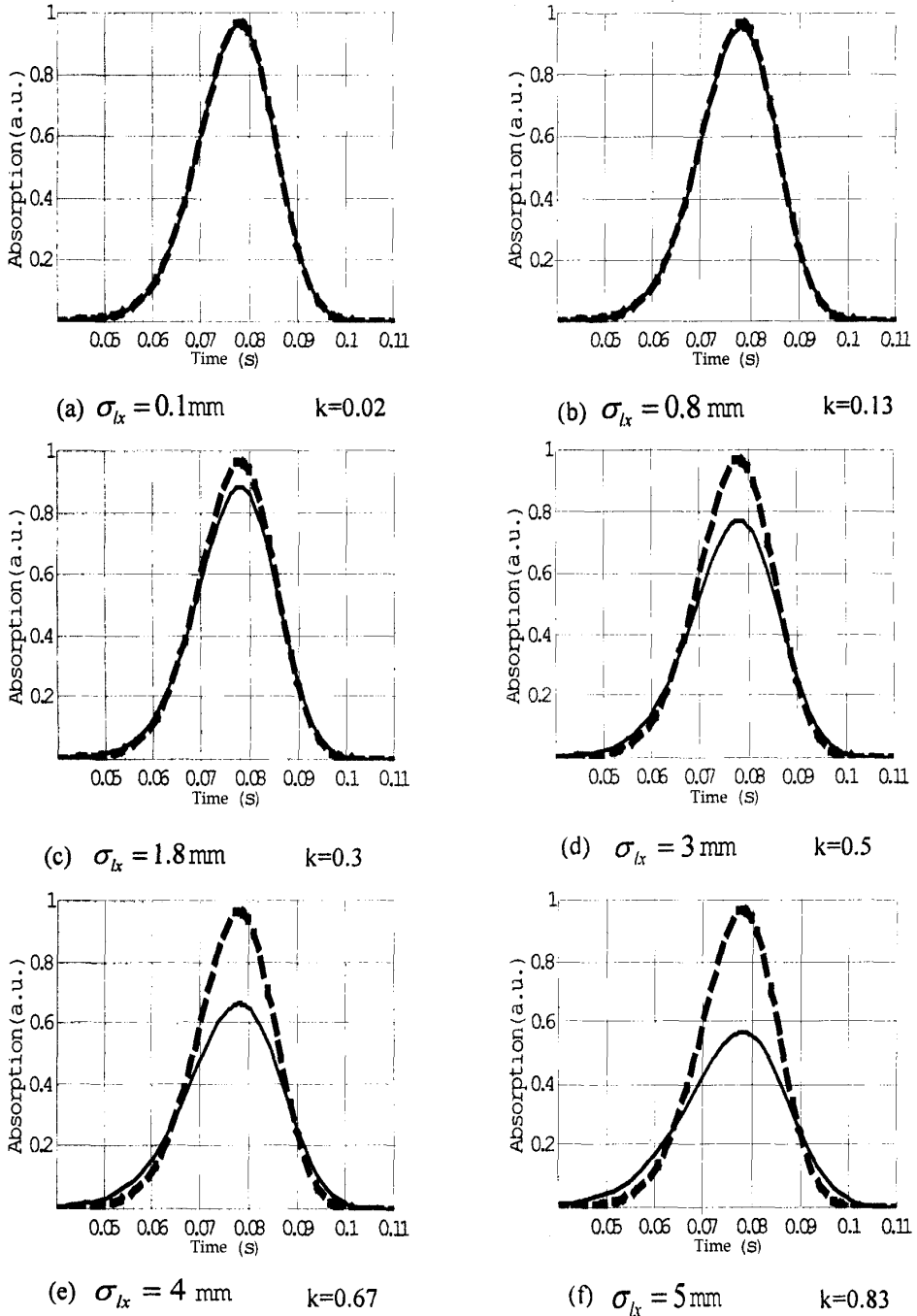
$$N(x, y, z, t) = g\left(x - \frac{gt^2}{2}, \sigma_t\right) g(y, \sigma_t) g(z, \sigma_t) \quad (3)$$

其中,  $\sigma_t = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_\nu^2 t^2}$  是膨胀时间  $t$  后的冷原子团半径。

假定探测光沿  $+z$  方向传播,光强呈高斯分布,  $(x, y)$  位置处的探测光光强可表示为<sup>[5]</sup>:

$$I(x, y) = P_0 g\left(x - \frac{1}{2}gt^2, \sigma_{tx}\right) g(y, \sigma_{ty}) \quad (4)$$

式中,  $P_0$  是探测光的功率,  $\sigma_{tx}, \sigma_{ty}$  是探测光在  $x, y$  方向的高斯半径。



理论拟合公式(6)和近似拟合公式(7)计算出的 TOF 吸收信号,图中实线是理论拟合公式计算所得 TOF 吸收信号,虚线是近似拟合公式计算所得 TOF 吸收信号,(a)-(f)是探测光光斑半径  $\sigma_{Lx}$  为 0.1 mm, 0.8 mm, 1.8 mm, 3 mm, 4 mm, 5 mm 时,理论拟合公式(6)和近似拟合公式(7)计算出的 TOF 吸收信号,其中冷原子团初始半径  $\sigma_{Lx}$  为 0.5 mm,探测光到冷原子团初始位置的距离  $h$  为 30mm,下落时间  $t = 0.078 \text{ s}$ ,膨胀后的冷原子团半径  $\sigma_{Lx}$  为 6mm

图2 探测光光斑半径  $\sigma_{Lx}$  取不同的值

The dashed line shows TOF absorption signal calculated by the approximate simulated formula, the solid line shows TOF absorption signal calculated by the theoretical simulated formula, (a)-(f) represent TOF absorption signal versus time for different radius of probes  $\sigma_{Lx} = 0.1 \text{ mm}, 0.8 \text{ mm}, 1.8 \text{ mm}, 3 \text{ mm}, 4 \text{ mm}, 5 \text{ mm}$ , with  $\sigma_0 = 0.5 \text{ mm}, h = 30 \text{ mm}, t = 0.078 \text{ s}, \sigma_t = 6 \text{ mm}$

Fig. 2 TOF absorption signal as a function of time

冷原子团由初始位开始膨胀并自由下落,经时间  $t_0$  后到达探测光处,当冷原子团穿过探测光时,探测器记录到的 TOF 吸收信号是<sup>①</sup>:

$$N(t) = \iiint I(x, y) N(x, y, z, t) dx dy dz \quad (5)$$

对上式进行空间积分后,可得探测器记录到的 TOF 吸收信号为<sup>[5]</sup>:

$$N(t) = \frac{P_0}{2\pi \sqrt{(\sigma_{lx}^2 + \sigma_l^2)(\sigma_{ly}^2 + \sigma_l^2)}} \times \exp\left[-\left(\frac{g(t_0^2 - t^2)}{2\sqrt{2}\sqrt{\sigma_{lx}^2 + \sigma_l^2}}\right)^2\right] \quad (6)$$

Brzozowski 对上式作了一个简化,使实验数据处理时更简单,方便。假设测量过程中所用探测光为高斯光束,即探测光光斑半径  $\sigma_{lx}$  远小于冷原子团扩散半径  $\sigma_l$ 。

则公式(6)可简化为<sup>[5]</sup>

$$N(t) = \frac{P_0}{2\pi\sigma_l^2} \exp\left[-\left(\frac{g(t_0^2 - t^2)}{2\sqrt{2}\sigma_l}\right)^2\right] \quad (7)$$

由于上式是在探测光光斑半径  $\sigma_{lx}$  远小于膨胀后的冷原子团半径  $\sigma_l$  的近似条件下得出的,因此探测光光斑半径  $\sigma_{lx}$  在远小于  $\sigma_l$  的一定取值范围内是成立的,但随着探测光光斑半径  $\sigma_{lx}$  的逐渐增大,由近似拟合公式(7)所得 TOF 吸收信号的误差也逐渐增大,当探测光光斑半径  $\sigma_{lx}$  的取值超出一定的范围后,此时再用近似拟合公式(7)所得 TOF 吸收信号的误差比较显著,不可忽略,因此在下面的理论计算中我们比较了探测光光斑半径  $\sigma_{lx}$  在不同取值的情况下,理论拟合公式(6)和近似拟合公式(7)所得 TOF 吸收信号的误差。

图 2 中(a),(b),(c),(d),(e),(f)为探测光光斑半径  $\sigma_{lx}$  在不同的取值时,理论拟合公式(6)和近似拟合公式(7)所计算出的 TOF 吸收信号随时间变化的曲线,计算过程中冷原子团初始半径  $\sigma_0$  为 0.5 mm,探测光到冷原子团初始位置的距离  $h$  为 30 mm,下落时间  $t = 0.078$  s,膨胀后的冷原子团半径  $\sigma_l$  为 6 mm。

从图 2 中可看出,随着探测光光斑半径  $\sigma_{lx}$  逐渐增大,理论拟合公式(6)和近似拟合公式(7)所计算出的 TOF 吸收信号的误差也逐渐增大,为了定量给出误差随探测光光斑半径与冷原子团高斯半径之比

$k$  的变化曲线,我们定义误差  $\Delta = \frac{P_a - P_p}{P_p}$ , 其中  $P_a$  是近似拟合公式计算出 TOF 吸收信号的最大值,  $P_p$  是理论拟合公式计算出 TOF 吸收信号的最大值,图(3)表示误差  $\Delta$  随  $k$  的变化曲线:

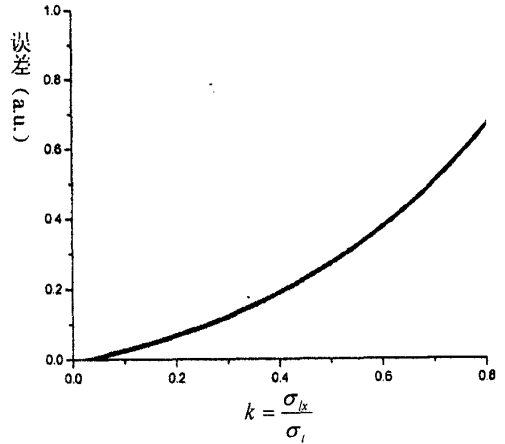


图 3 误差  $\Delta$  随探测光光斑半径与冷原子团半径比值  $k$  的变化关系曲线

Fig. 3 The error  $\Delta$  as a function of the ratio  $k$  of the radius of probe to the cold atoms

从上图中可知当探测光光斑半径与冷原子团半径的比值小于 0.2 时,即探测光光斑半径小于 1.2 mm 时,理论拟合公式与近似拟合公式计算出的 TOF 吸收信号的误差小于 10%,这个误差可忽略不计,随着探测光光斑半径与冷原子团半径比值的逐渐增加,近似拟合公式计算出 TOF 吸收信号的误差也逐渐增大。

## 2 结论

本文对用于冷原子温度测量的吸收谱理论拟合公式和近似拟合公式进行了误差分析与比较。研究表明:当探测光光斑半径与冷原子团高斯半径之比小于 0.2 时,误差小于 10%,理论拟合公式和近似拟合公式能很好的相符,随着探测光光斑半径与冷原子团高斯半径比值的逐渐增大,用近似拟合公式计算出 TOF 吸收信号的误差也逐渐增大,当探测光光斑半径与冷原子团高斯半径之比等于 0.5 时,误

① 透射光强为  $I' = I_0 e^{-\alpha l} = I_0(1 - \alpha l) = I_0 - I_0 \alpha l$ , 则吸收光强为:  $\Delta I = I_0 \alpha l$  式中  $\alpha$  为吸收系数,  $l$  为介质长度,在光强未饱和和时,吸收信号与探测光光强成正比,与吸收系数  $\alpha$  成正比,即 TOF 吸收信号  $N(t) \propto I_0 \alpha$ , 由于  $\alpha \propto$  原子密度  $N^{[13]}$ , 故  $N(t) \propto I_0 N$

差将增大到 20%, 这时用近似拟合公式计算出 TOF 法测量冷原子温度的数据准确处理提供帮助。吸收信号的误差较为显著。本文的计算将为 TOF

#### 参考文献:

- [1] HANSCH T, SCHAWLOW A. Cooling of Gases by Laser Radiation [J]. *Opt Commun*, 1975, **13**: 68.
- [2] CHU STEVEN, HOLLBERG L, BJORKHOLM J E, *et al.* Three-Dimensional Viscous Confinement and Cooling of Atoms by Resonance Radiation Pressure [J]. *Phys Rev Lett*, 1985, **55**: 48.
- [3] WALHOUT M, STERR U, ORZEL C, *et al.* Optical Control of Ultracold Collisions in Metastable Xenon [J]. *Phys Rev Lett*, 1995, **74**: 506.
- [4] PAUL D LETT, RICHARD N WATTS, CHRISTOPH I WESTBROOK, *et al.* Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit [J]. *Phys Rev Lett*, 1988, **61**: 169.
- [5] TOMASZ M BRZOWSKI, MARIA MACZYNSKA, MICHAL ZAWADA, *et al.* Time-of-flight Measurement of the Temperature of Cold Atoms for Short trap-probe Beam Distance [J]. *J Opt B*, 2002, **62**: 66.
- [6] ANDERSON M H, ENSHER J R, MATTHEWS R M, *et al.* Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor [J]. *Science*, 1995, **269**: 198.
- [7] DAVIS K B, MEWES M O, ANDREWS M R, *et al.* Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms [J]. *Phys Rev Lett*, 1995, **75**: 3969.
- [8] BRADLEY C C, SACKETT C A, TOLLETT J J, *et al.* Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions [J]. *Phys Rev Lett*, 1995, **75**: 1687.
- [9] CHU STEVEN. The Manipulation of Neutral Particles [J]. *Reviews of Modern Physics*, 1998, **70**: 685.
- [10] CLAUDE N COHEN-TANNOUDJI. Manipulating Atoms With photons [J]. *Reviews of Modern Physics*, 1998, **70**: 707.
- [11] WILLIAM D PHILLIPS. Laser Cooling and Trapping of Neutral Atoms [J]. *Reviews of Modern Physics*, 1998, **70**: 721.
- [12] 武海斌, 姚景芹, 常宏, 等. 一种简易的激光冷却和俘获 Rb 原子的实验系统 [J]. *量子光学学报*, 2005, **11**(2): 79.
- [13] ROBERT W BOYD. *Nonlinear Optics* [M]. Academic Press INC. 1992.

## The Error Analyzing and Comparing between Theoretical and Approximate Simulated Formula in Measuring The Temperature of Cold Atoms with Short-distance Time-of-flight Method

MA Jie, HAN Yan-xu, WANG Bo, WANG Hai

(State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices and Institute of Opto-Electronics Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

**Abstract:** The error analyzing and comparing between theoretical and approximate simulated formula in measuring the temperature of cold atoms with short-distance time-of-flight (TOF) method are reported. The results shows that the approximate simulated formula agrees well with the theoretical simulated formula when the ratio of the radius of probe to the cold atoms is less than 0.2. When the ratio of the radius of probe to the cold atoms approaches 0.5, the error between the approximate simulated formula with the theoretical simulated formula for TOF absorption signal is significant.

**Key words:** magnetic optical trap(MOT); cold atoms; short-distance time-of-flight(TOF)

# 测量冷原子温度的理论与近似拟合公式的误差分析

作者: [马杰](#), [韩燕旭](#), [王波](#), [王海](#), [MA Jie](#), [HAN Yan-xu](#), [WANG Bo](#), [WANG Hai](#)  
作者单位: [量子光学与光量子器件国家重点实验室](#), [山西大学光电研究所](#), [山西](#), [太原](#), [030006](#)  
刊名: [量子光学学报](#) [ISTIC](#) [PKU](#)  
英文刊名: [ACTA SINICA QUANTUM OPTICA](#)  
年, 卷(期): 2006, 12(2)

## 参考文献(14条)

1. [HANSCH T;SCHAWLOW A](#) [Cooling of Gases by Laser Radition](#) 1975
2. [CHU STEVEN;HOLLBERG L;BJORKHOLM J E](#) [Three-Dimensional Viscous Confinement and Cooling of Atoms by Resonance Radiation Pressure](#) 1985
3. [WALHOUT M;STERR U;ORZEL C](#) [Optical Control of Ultracold Collisions in Metastable Xenon](#) 1995
4. [PAUL D LETT;RICHARD N WATTS;CHRISTOPH I WESTBROOK](#) [Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit](#) 1988
5. [TOMASZ M BRZOWSKI;MARIA MACZYNSKA;MICHAL ZAWADA](#) [Time-of-flight Measurement of the Temperature of Cold Atoms for Short trap-probe Beam Distance](#) 2002
6. [ANDERSON M H;ENSHER J R;MATTHEWS R M](#) [Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor](#) 1995
7. [DAVIS K B;MEWES M O;ANDREWS M R](#) [Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms](#) 1995
8. [BRADLEY C C;SACKETT C A;TOLLETT J J](#) [Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions](#) 1995
9. [CHU STEVEN](#) [The Manipulation of Neutral Particles](#) 1998
10. [CLAUDE N COHEN-TANNOUJJI](#) [Manipulating Atoms With photons](#) 1998
11. [WILLIAM D PHILLIPS](#) [Laser Cooling and Trapping of Neutral Atoms](#)[外文期刊] 1998(3)
12. [武海斌;姚景芹;常宏](#) [一种简易的激光冷却和俘获Rb原子的实验系统](#)[期刊论文]-[量子光学学报](#) 2005(02)
13. [ROBERT W BOYD](#) [Nonlinear Optics](#) 1992
14. [透射光强为  \$I' = I\_0 e^{-\alpha l} = I\_0\(1 - \alpha l\) = I\_0 - I\_0 \alpha l\$ , 则吸收光强为:  \$\Delta I = I\_0 \alpha l\$  式中  \$\alpha\$  为吸收系数,  \$l\$  为介质长度, 在光强未饱和时, 吸收信号与探测光光强成正比, 与吸收系数  \$\alpha\$  成正比, 即 TOF 吸收信号  \$N\(t\) \propto I\_0 \alpha l\$ , 由于  \$\alpha \propto\$  原子密度  \$N\$ \[13\], 故  \$N\(t\) \propto I\_0 N\$](#)

## 本文读者也读过(2条)

1. [张宇鑫](#), [李国强](#), [赵世峰](#), [ZHANG Yu-xin](#), [LI Guo-qiang](#), [ZHAO Shi-feng](#) [张弦梁结构振动方法索力识别\(II\):实用公式及误差分析](#)[期刊论文]-[振动与冲击](#)2009, 28(3)
2. [耿涛](#), [闫树斌](#), [王彦华](#), [杨海菁](#), [张天才](#), [王军民](#), [Geng Tao](#), [Yan Shu-Bin](#), [Wang Yan-Hua](#), [Yang Hai-Jing](#), [Zhang Tian-Cai](#), [Wang Jun-Min](#) [用短程飞行时间吸收谱对铯磁光阱中冷原子温度的测量](#)[期刊论文]-[物理学报](#)2005, 54(11)

引用本文格式: [马杰](#), [韩燕旭](#), [王波](#), [王海](#), [MA Jie](#), [HAN Yan-xu](#), [WANG Bo](#), [WANG Hai](#) [测量冷原子温度的理论与近似拟合公式的误差分析](#)[期刊论文]-[量子光学学报](#) 2006(2)